Treball de fi de màster

Títol: Les matemàtiques que no tenen cabuda en el currículum. Material pels qui en volen més.

Cognoms: Gràcia Sala

Nom: Gerard

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemàtiques

Director/a: Josep Maria Cors Iglesias

Data de lectura: 28 de juny del 2011

Índex

1 Introducció

L'educació matemàtica és un món complex perquè és el lloc on conflueixen de manera natural les dificultats pròpies de l'educació i les dificultats pròpies de les matemàtiques. Davant dels ulls de l'alumne, les matemàtiques són complicades i avorrides, així doncs, històricament, la tasca del professor de matemàtiques és doblement difícil. La preocupació davant d'aquesta situació i el creixent temor social a les matemàtiques, han provocat que la didàctica de la matemàtica visqui contínuament en estat evolutiu. Els moviments i les iniciatives dels investigadors dedicats a l'educació matemàtica són incomptables. Noves tendències, idees, eines i conceptes apareixen dia rera dia, oferint un cúmul inacabable de possibilitats als professionals de la docència, gràcies a tota aquella gent que, d'alguna manera s'estima les matemàtiques.

Ara bé, és necessari saber reflectir tota aquesta preocupació i esforç envers l'aprenentatge de les matemàtiques a dins les escoles i els instituts, encaixant les noves tendències dins el marc educatiu actual. Les idees són fantàstiques, a més de necessàries per avanaçar. És positiu que hi hagi matemàtics preocupats per la situació de l'educació matemàtica però també és imprescindible establir una conexió entre ells i els docents. Construir un canal de comunicació entre aquests dos grups que garanteixi un flux continu d'intercanvi d'informació és una tasca tant difícil com fonamental per avançar. L'experiència dels docents té un valor incalculable, ja que són ells els que conviuen amb els alumnes i s'enfronten cara a cara amb les dificultats i els reptes proposats per l'ensenyament de les matemàtiques. Els professors i professores dels centres educatius encarregats de procurar educar i formar les generacions futures, són conscients i grans coneixedors de la realitat social i ciutadana on estem immersos. La seva experiència acredita el seu criteri per a discernir entre aquelles idees innovadores que poden ser aplicades a l'aula i aquelles que no tenen futur més enllà del marc teòric. La seva participació en el procés de canvi de l'educació matemàtica és vital.

L'objectiu d'aquest treball és l'elaboració de recursos amb possibilitats reals de gestió dins l'aula. Però no parlem de recursos qualssevol. L'eix central, la raó de ser d'aquest treball és un tema que està a l'ordre del dia en el món educatiu: l'atenció a la diversitat. El paradigma educatiu actual, conviu amb harmonia amb la realitat social d'avui en dia. El concepte *d'educació per a tots* és el pilar fonamental que sosté la filosofia dels centres educatius actuals i és per aquest motiu que l'atenció a la diversitat és un tema clau en el món educatiu. Els alumnes d'un mateix grup, que conviuen compartint aula i experiències durant mesos, poden ser tant diferents com la nit i el dia. Aspectes culturals com la religió o la llengua ofereixen una pluralitat i una riquesa a cada grup que fa que l'experiència docent tingui un caràcter singular i únic a cada aula. A més, a aquesta realitat s'hi afegeix el fet que el nivell acadèmic dels alumnes és molt més variat que no pas la seva procedència. Aquesta és la realitat social de les escoles i, per tant, no té sentit pensar en un ensenyament homogeni, ja que el públic és altament heterogeni.

La capacitat d'adaptar-se davant d'aquestes situacions s'ha convertit en una habilitat bàsica per a la supervivència dels docents. Els centres han reaccionat creant racons tant fascinants com l'aula oberta o l'aula d'acollida, estesos per tot el panorama educatiu. Aquestes iniciatives fantàstiques són mesures d'atenció a la diversitat que cobreixen les necessitats educatives especials de molts alumnes amb dificultats cognitives o d'alumnes nouvinguts en procés d'adaptació. No obstant, no són aquests els únics alumnes amb necessitats educatives particulars. Existeix un grup proporcionalment significatiu d'alumnes que tenen la capacitat de superar amb èxit i gairebé sense esforç l'etapa d'ensenyament obligatori. Hi ha molts alumnes que senten que el ritme de la classe és lent i que els reptes proposats són poc exigents. Al mateix temps, dins d'aquest grup hi ha alumnes amb nivells diferents i gustos diferents (uns destaquen en matemàtiques, els altres en química i els altres en habilitats lingüístiques). Segurament, tots aquests alumnes estan en una situació menys preocupant que els alumnes amb dificultats cognitives severes o els alumnes nouvinguts amb problemes d'adaptació, però no per això ens n'hem d'oblidar.

Les matemàtiques són una font de recursos inesgotable per a generar material que suposi nous reptes per a aquest tipus d'alumnat. La capacitat de raonament, la capacitat d'abstracció i l'habilitat per resoldre problemes només són alguns dels valuosos aspectes que es poden potenciar a través de les matemàtiques. Més enllà dels continguts conceptuals, són els processos matemàtics i l'estructura dels raonaments els que fan que aquesta ciència tingui un valor inqüestionable en la formació dels estudiants.

La part central d'aquest treball consisteix en un paquet de recursos en forma de dossiers destinats a aquells alumnes amb gust o facilitat per les matemàtiques. El material ha estat elaborat per a convertir-se en un material pràctic i de fàcil utilització i, de fet, la segona part del treball consisteix en una sèrie de propostes de gestió del material a l'aula. A més, també s'hi exposa una extensa explicació de la filosofia docent que he seguit per elaborar els dossiers i de l'encaix que aquest material té dins l'entorn del currículum de secundària.

2 Definició i context del problema

2.1 Definició

En l'etapa d'educació obligatòria l'atenció a la diversitat és, sens dubte, un del pilars que fonamenten el paradigma de l'escola actual. La iniciativa de fer una escola per a tothom és, al meu entendre, la idea motriu que ha empès a recompondre continguts, mètodes de treball i formes d'avaluació per ajustar-los al relativament nou llenguatge de les competències bàsiques.

Avui, els professors han assumit el rol social d'educadors. La seva tasca no es limita a la transmissió de coneixements, el seu objectiu és la formació integral d'individus. És en aquest context que l'educació i l'avaluació per competències prenen sentit.

"S'entén per competència la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva"

Quan un alumne assimila aquestes habilitats es pot assegurar que el seu pas per l'etapa d'educació secundària obligatòria ha estat un èxit. Ara bé, realment aquesta és una escola per a tothom?

Tots estarem d'acord en que l'esforç és un valor positiu que s'ha de potenciar en l'alumnat. No obstant, és un fet que els objectius marcats pel paradigma de l'educació obligatòria són poc ambiciosos per a un ampli conjunt d'alumnes. En qualsevol grup, és fàcil trobar alumnes que, ho acceptin o no, se senten poc exigits pel ritme de treball de la classe. Aquests alumnes no coincideixen necessàriament amb els que obtenen millors resultats acadèmics, però tot i així són fàcils de detectar per a qualsevol professor. Vull aclarir i destecar que quan parlo d'aquest perfil d'alumnes no em refereixo exclusivament a alumnes excepcionals amb altes capacitats. Desafortunadament, no és necessari anar tan enllà per a localitzar alumnes que se sentin poc exigits per l'etapa d'educació obligatòria.

Ningú dubta que, a nivell teòric, l'atenció a la diversitat també està enfocada a aquest perfil d'alumne. Malauradament, les limitacions de recursos i les creixents restriccions de personal docent fan que, a nivell pràctic, aquest tipus d'alumne sigui el primer en ser esborrat de la llista d'objectius de l'atenció a la diversitat. Són, en certa manera, els grans oblidats de l'etapa d'educació obligatòria.

2.2 Conseqüències

Sens dubte, aquest descuit té efectes negatius en aquest perfil d'alumne. D'una banda, la falta d'exigència pot desmotivar els estudiants fins al punt de fer-los perdre totalment l'interès per l'aprenentatge. D'altra banda, és possible que la manca de capacitat per esforçar-se es vegi recompensada amb bons resultats acadèmics durant un temps, enviant un missatge contradictori a l'alumne, que reflectirà aquesta actitud en etapes d'estudis posteriors i en altres aspectes de la vida on no tindrà la mateixa fortuna. A més, no podem oblidar que tots aquests efectes negatius poden veure's accentuats (o frenats) per l'actitud dels entorns familiars, que en general estan fora de l'abast dels centres. Però no és aquest l'únic motiu pel qual val la pena atendre de manera especial aquest tipus d'alumnes.

Un dels ens acadèmics de referència a nivell europeu, impulsor de l'educació i avaluació per competències, és l'informe PISA. Observant els resultats del nostre país en les últimes proves, podem veure que és en els nivells de rendiment més elevat on estem més endarrerits respecte la mitjana de l'OCDE. És de sentit comú pensar que el perfil d'alumne al que m'estic referint, que en certa manera queda desatès en el nostre marc educatiu, és el perfil d'alumne candidat a engreixar el percentatge d'estudiants d'alt rendiment del nostre país. Per tant, parar atenció a alumnes amb facilitats per l'estudi també ajudaria a retallar distàncies amb els països capdavanters de la UE.

2.3 Matemàtiques

Evidentment, aquests objectius no són gens fàcils d'assolir. La manca de recursos i, sobretot, la falta de personal marquen indefectiblement l'estructura i el funcionament dels centres educatius. És per això que ens hem de plantejar mètodes de treball realistes, aproximacions factibles a aquests objectius per millorar, en la mesura del possible, el rendiment acadèmic dels estudiants. En l'àrea de matemàtiques, les possibilitats són realment àmplies. Fora de les matemàtiques estrictament curriculars, existeixen milers de problemes, activitats o fins i tot jocs que suposen reptes a l'abast de l'alumnat. A través de les matemàtiques, siguin curriculars o no, es poden fer un gran nombre de propostes més o menys lúdiques, que ajudin als alumnes a obrir una mica la ment, descobrir nous estils de raonament, exercitar les seves capacitats i sobretot a ensenyar-los a gaudir, pensant.

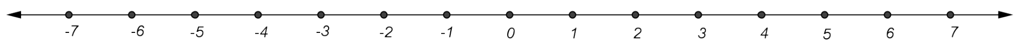
3 Dossiers

A continuació mostro un conjunt de recursos que he elaborat en forma de dossiers. El material ha estat dissenyat amb l'objectiu de ser fàcilment aplicable, destinat a aquells alumnes amb gust o facilitat per les matemàtiques.

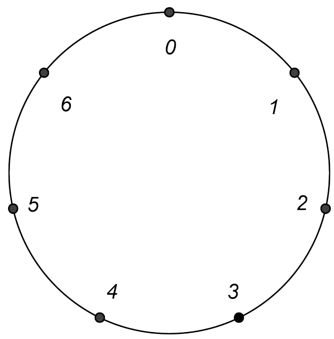
3.1 Aritmètica modular

3.1.1 Introducció

Segurament entens que l'aritmètica és aquella part de les matemàtiques que es dedica a estudiar els nombres i les operacions elementals. Com ja deus haver vist en diverses ocasions, habitualment els nombres enters es representen com unes marques distribuïdes al llarg d'una recta:



Usant aquesta representació, les operacions aritmètiques que coneixes es poden imaginar com a desplaçaments cap a la dreta o cap a l'esquerra sobre aquesta recta. Ara bé, què passaria amb les operacions bàsiques si enlloc de treballar sobre una recta, tal i com acabem d'explicar, ho féssim sobre un cercle com aquest?

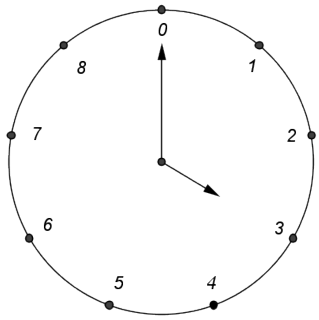


En aquest cercle si a l'1 li sumem 5 unitats, anem a parar al 6. Així podem escriure, tal i com hem fet sempre, 1+5=6. En canvi, si al 4 li sumem 3 unitats, això equival a desplaçar-se 3 espais en sentit horari en el cercle, i per tant anem a parar al zero. Dit d'una altra manera, en aquest cercle 4+3=0. Esbrina el reultat de fer les següents operacions en el cercle que hem dibuixat:

$$2 + 4 = \qquad 3 + 5 = \qquad 2 - 7 = \qquad 5 - 6 = \qquad -3 + 2 =$$

Aquesta manera d'operar i representar els nombres, recorda al funcionament d'un rellotge (un rellotge de 7 hores en el nostre cas), és per aquest motiu que l'atritmètica modular es coneix sovint amb el nom d'*aritmètica del rellotge*.

Exemple 1 *Observa amb atenció el rellotge de la figura i respon:*

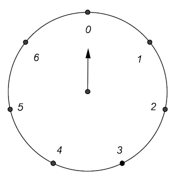


1. On estaran les agulles del rellotge quan hagin passat 9 hores? i quan n'hagin passat 23? i 147?
2. Com estaran situades les agulles 6 hores abans d'arribar al zero?

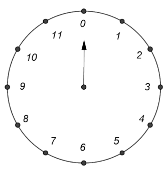
La resposta a la primera pregunta és força evident: al cap de 9 hores les agulles tornen a estar en la mateixa posició que al principi. Això ens ajuda a respondre la segona part de la qüestió. Si cada vegada que passen 9 hores les agulles tornen a la posició original, és possible pensar amb les 23 hores com 9+9+5. Dit d'una altra manera, deixar passar 23 hores és el mateix que deixar passar 9 hores dues vegades (de manera que les agulles fan dues voltes senceres i acaben a la seva posició original) i després afegir 5 hores. És a dir, al cap de 23 hores les agulles marquen les 8, igual que si hagessin passat només 5 hores. Això ho podem escriure de la següent manera: $23 = 9 \cdot 2 + 5$. *Aquesta és l'expressió corresponent a la divisió entera de 23 entre 9, i ho podem interpretar com que, les agulles fan 2 voltes senceres (el quocient) i després es mouen 5 posicions més (el residu). Així doncs, per esbrinar quina hora indica el rellotge quan hagin passat 23 hores, n'hi ha prou dividint 23 entre 9 i mirant el residu. Amb aquesta eina és fàcil de calcular que si passen 147 hores el rellotge marcarà les 6 en punt, ja que* $147 = 9 \cdot 16 + 3$ *i per tant les agulles fan 16 voltes senceres i després avançen 3 hores més. De manera similar, 6 hores abans d'arribar el zero seran les tres, ja que* $-6 = 9 \cdot (-1) + 3$.

Activitat 1 *Per familiaritzar-te una mica amb aqustes idees digues quina hora indicarà el rellotge si han passat les hores especificades a la primera fila:*

Rellotge de 7 hores	0	4	7	11	127	536	-8	-13	-45	-536



Rellotge de 12 hores	0	4	7	11	127	536	-8	-13	-45	-536



3.1.2 Congruències

Observa que el rellotge de 7 hores de l'activitat anterior indica la mateixa hora si passen 4 hores des de la posició inicial, com si en passen 11. Quan això passa diem que 11 és congruent amb 4 mòdul 7 i ho escrivim per $11 \equiv 4 \ (mod\ 7)$. Tots dos nombres tenen residu 4 en dividir entre 7, o dit d'un altra manera, tots dos són un múltiple de 7 més 4.

De manera un mica més formal, escriurem

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

i llegirem a és congruent amb b mòdul n, si en dividir a i b entre n, s'obté el mateix residu.

Exemple 2 - *El 21 i el 16 són congruents mòdul 5 perquè les divisions:*

$$\begin{array}{r|l} 21 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$$

tenen el mateix residu: 1. A més també són congruents amb 1 mòdul 5, ja que la divisió

$$\begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$$

també té residu 1. És a dir,

$$21 \equiv 16 \equiv 1 \,(mod\, 5)$$

- *Si dividim entre 5 només és possible obtenir 5 residus diferents:*

  – *Residu 0. Corresponent als múltiples de 5.*

  – *Residu 1. Corresponent als múltiples de 5, més 1 unitat. Per exemple* $16 = 3 \cdot 5 + 1$*, o* $21 = 5 \cdot 4 + 1$.

  – *Residu 2. Corresponent als múltiples de 5, més 2 unitats. Per exemple* $17 = 3 \cdot 5 + 2$*, o* $-3 = 5 \cdot (-1) + 2$.

  – *Residu 3. Corresponent als múltiples de 5, més 3 unitats. Per exemple* $18 = 3 \cdot 5 + 3$.

  – *Residu 4. Corresponent als múltiples de 5, més 4 unitats. Per exemple* $19 = 3 \cdot 5 + 4$*, o* $-1 = 5 \cdot (-1) + 4$.

  No és possible obtenir residu 5, ja que els múltiples de 5, més 5 unitats, també són mútliples de 5 i per tant els correspon el residu 0. Així doncs, tots els nombres són congruents mòdul 5 amb algun d'aquests residus. En altres paraules, qualsevol nombre és congruent amb 0, 1, 2, 3, o 4 mòdul 5.

Activitat 2 1. *Digues quines de les següents parelles de nombres són congruents mòdul 3:*

$$3\,,0 \qquad 6\,,0 \qquad 5\,,1 \qquad 5\,,2 \qquad 7\,,1 \qquad 7\,,4$$

2. *Digues quines de les següents parelles de nombres són congruents mòdul 5:*

$$12\,,8 \qquad 25\,,0 \qquad 24\,,-1 \qquad 3\,,9 \qquad -2\,,3 \qquad -3\,,12$$

3. *4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,... són congruents amb 0 mòdul 4 ja que en dividir-los entre 4 sempre s'obté el mateix residu. Quin és aquest residu? com en diem d'aquests nombres?*

4. *Escriu 4 nombres congruents amb 5 mòdul 7.*

5. *Quan fèiem operacions amb el rellotge de 7 hores, el resultat només podia ser 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El 43 és congruent mòdul 7 a algun d'aquests nombres (0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6)? i el -26? i el 1543?*

6. *Qualsevol nombre enter a és congruent a 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 mòdul 7? Explica perquè.*

7. *De l'apartat 1, agafa les parelles de nombres a i b que siguin congruents mòdul 3 i ompple la taula:*

a	*b*	*a-b*

8. *Fes el mateix amb les parelles de nombres congruents mòdul 5 de l'apartat 2.*

9. *En la primera taula, quina relació creus que hi ha entre la columna de les diferències i el fet que a i b siguin congruents mòdul 3? i en la segona taula, què creus que passa si són congruents mòdul 5?*

10. *D'una banda tenim que* $2 \equiv 7\ (mod\ 5)$ *i de l'altra, tenim que* $7 \equiv 12\ (mod\ 5)$*. Què pots dir de 2 i 12? Creus que sempre és cert això? Raona-ho.*

Observant els resultats de l'activitat anterior completa les frases següents:

- Si a és múltiple d'n, aleshores $a \equiv$ ..... $(mod\ n)$
- Si $a \equiv b\ (mod\ n)$ aleshores la seva diferència, $a - b$, és .... d'n, és a dir, $a - b \equiv$ ..... $(mod\ n)$
- Si $a \equiv b\ (mod\ n)$ i $b \equiv c\ (mod\ n)$ aleshores ..... $\equiv$ ..... $(mod\ n)$.
- Els residus possibles de fer una divisió entre n són 0,1,...,n-1. Per tant, qualsevol nombre a és congruent mòdul n amb exactament un nombre entre ..... i ..... .

3.1.3 Suma i producte mòdul n

Exemple 3 *Com hem comentat en l'apartat anterior, quan es fa un càlcul mòdul 6 sempre es pot donar com a resultat algun dels següents nombres: 0, 1, 2, 3, 4 o 5 (els possibles residus d'una divisió per 6). Quan fem una operació mòdul 6 simplificarem el resultat tant com sigui possible, donant un nombre enter entre 0 i 5. Per exemple:*

$$34 + 21\,(mod\,8) = 55\,(mod\,8)$$

i si fem la divisió

$$\begin{array}{l|l} 55 & \underline{\;8\;\;\;} \\ 7 & 6 \end{array}$$

veiem que el residu és 7, i per tant

$$55 \equiv 7\,(mod\,8)$$

així el resultat, reduït mòdul 8, de la operació $34 + 21\,(mod\,8)$ *és 7.*

Activitat 3 *Realitza les operacions següents i dóna el resultat de la manera més simplificada possible (per exemple,si el càlcul es fa mòdul 5 el resultat ha de ser un nommbre enter entre 0 i 4, ambdós inclosos, i si el càlcul és mòdul 11 el resultat està entre 0 i 10):*

a) $12 + 13\,(mod\,5) = 25\,(mod\,5) = 0$

b) $11 - 4\,(mod\,4) = 7\,(mod\,4) = 3$

c) $12 + 5\,(mod\,11) =$

d) $-3 + 9\,(mod\,5) =$

e) $9 \cdot 3\,(mod\,11) =$

f) $-2 \cdot 14\,(mod\,9) =$

Quan les operacions a realitzar són senzilles, com en l'activitat anterior, una bona manera de realitzar els càlculs és operar els nombres entre ells amb l'aritmètica habitual i un cop s'obté el resultat, calcular el residu de dividir entre el mòdul. És a dir, si volem calcular $7+10\,(mod\,3)$, primer sumem 10+7=17 de la manera habitual i després reduim el 17 mòdul 3, o sigui calculem el residu de dividir 17 entre 3, $17 = 3 \cdot 5 + 2$, per tant $7 + 10\,(mod\,3) = 2$. Ara bé, si l'operació que ens plantegem fer és una mica més complicada potser ens convindria procedir d'una manera diferent. Si, per exemple, volem calcular $327 \cdot 254\,(mod\,5)$ podriem realitzar l'operació amb l'aritmètica habitual i després calcular el residu com fèiem fins ara. Així:

$$327 \cdot 254\,(mod\,5) = 83058\,(mod\,5) = 3\,(mod\,5)$$

Alternativament, podriem realitzar el mateix càlcul seguint els passos següents:

- Calculem els residus dels dos nombres que volem multiplicar: $327 \equiv 2\,(mod\,5)$ i $254 \equiv 4\,(mod\,5)$
- Ara multipliquem els residus obtinguts: $2 \cdot 4 = 8$
- I si cal, tornem a reduir mòdul 5: $8 \equiv 3\,(mod\,5)$

Posant-ho tot junt:

$$327 \cdot 254\,(mod\,5) = 2 \cdot 4\,(mod\,5) = 8\,(mod\,5) = 3\,(mod\,5)$$

Com es pot veure, aquest segon mètode és força més senzill que el primer, i en aquest cas s'obté el mateix resultat. Creus que això passarà sempre?

Activitat 4 *Comprova amb les operacions següents que el resultat és el mateix si primer fem la operació i després calculem el residu, que si primer calculem els residus i després fem la operació:*

- $127 - 43\,(mod\,7) = \begin{cases} 84\,(mod\,7) = 0 \\ 1 - 1\,(mod\,7) = 0 \end{cases}$
- $541 \cdot 27 - 12\,(mod\,3) =$
- $25 \cdot 98764\,(mod\,5) =$
- $23 \cdot 43\,(mod\,11) =$
- $45 \cdot 23 + 6 \cdot (-1) - 325\,(mod\,7) =$

3.1.4 L'invers d'un nombre mòdul n

Donats dos nombres es diu que un és l'invers de l'altre si en multiplicar-los el resultat és 1. Per exemple, el 1/2 és l'invers del 2 ja que $1/2 \cdot 2 = 1$ i viceversa: el 2 és l'invers del 1/2. Aquesta propietat, es comporta de manera una mica especial en l'aritmètica modular. Per exemple, el 3 és l'invers del 2 mòdul 5, ja que $3 \cdot 2 \equiv 1\,(mod\,5)$. Per treballar amb comoditat amb aquestes operacions, sovint s'elaboren taules de la suma i del producte mòdul n. Per exemple, la taula de la suma mòdul 5 és:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

i la taula del producte mòdul 5 és:

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Activitat 5 *Oservant la taula del producte, troba els inversos mòdul 5 de: 1, 2, 3 i 4. És possible trobar l'invers del 0?*

Activitat 6 *Fes les taules de la suma i del producte mòdul 2, 3, 4, 6 i 7.*

Activitat 7 *Mirant les taules del producte que has elaborat en l'activitat anterior, respon:*

- *És possible que el producte de dos nombres diferents de zero sigui congruent amb 0 mòdul 6? i mòdul 3? i 5? explica perquè.*
- *Completa les taules següents:*

Nombre	*0*	*1*
Invers mòdul 2		

Nombre	*0*	*1*	*2*
Invers mòdul 3			

Nombre	*0*	*1*	*2*	*3*
Invers mòdul 4				

Nombre	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Invers mòdul 5					

Nombre	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Invers mòdul 6						

Nombre	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Invers mòdul 7							

- *Com pots comprovar, no tots els nombres tenen invers mòdul 4 o mòdul 6. En canvi tots els nombres, excepte el zero, tenen invers mòdul 2, 3, 5, i 7. Què creus que és el que diferencia aquests dos grups de nombres? Creus que qualsevol nombre tindrà invers mòdul 8? i 9? i 10? i 11?*

Activitat 8 *Quines condicions han de complir els nombres* a *i* n*, perquè* a *tingui invers mòdul* n*? Intenta raonar la teva resposta.*

3.1.5 Potències mòdul n

Activitat 9 *Calcula les potències següents mòdul 7:*

$2^0 \equiv$	$2^1 \equiv$	$2^3 \equiv$	$2^4 \equiv$	$2^5 \equiv$	$2^6 \equiv$	$2^7 \equiv$	$2^8 \equiv$	$2^9 \equiv$	$2^{10} \equiv$	$2^{11} \equiv$
$3^0 \equiv$	$3^1 \equiv$	$3^3 \equiv$	$3^4 \equiv$	$3^5 \equiv$	$3^6 \equiv$	$3^7 \equiv$	$3^8 \equiv$	$3^9 \equiv$	$3^{10} \equiv$	$3^{11} \equiv$
$5^0 \equiv$	$5^1 \equiv$	$5^3 \equiv$	$5^4 \equiv$	$5^5 \equiv$	$5^6 \equiv$	$5^7 \equiv$	$5^8 \equiv$	$5^9 \equiv$	$5^{10} \equiv$	$5^{11} \equiv$

Activitat 10 *Observa els resultats i explica què passa.*

Calculem les potències de 6 mòdul 7:

- $6^1 \,(mod\, 7) = 6$
- $6^2 \,(mod\, 7) = 36 \,(mod\, 7) = 1$
- $6^3 \,(mod\, 7) = 6$
- $6^4 \,(mod\, 7) = 6^2 \cdot 6^2 \,(mod\, 7) = 1$

i així s'anirien repetint successivament. És fàcil veure que $6^5 \,(mod\, 7) = 6$, $6^6 \,(mod\, 7) = 1$, ... Sabries dir quan és $6^{99} \,(mod\, 7)$? De fet la resposta és ben senzilla. Si desenvolupem la potència:

$$6^{99} \,(mod\, 7) = 6 \cdot 6 \cdot \overset{(99)}{\ldots} \cdot 6 \,(mod\, 7)$$

com que $6^2 \,(mod\, 7) = 1$, agrupant-los de dos en dos:

$$(6 \cdot 6) \cdot \ldots \cdot (6 \cdot 6) \cdot 6 \,(mod\, 7) = 6^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 6^2 \cdot 1 \,(mod\, 7) = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 6 \,(mod\, 7) = 6$$

Per tant, no importa com de gran sigui l'exponent si no quants en sobraran si els agrupem de dos en dos, o en altres paraules, només importa el residu de dividir l'exponent entre 2: $99 \,(mod\, 2)$. Com que $6^2 \,(mod\, 7) = 1$, aleshores

$$6^{99} \,(mod\, 7) = 6^{99 \,(mod\, 2)} \,(mod\, 7) = 6^1 \,(mod\, 7) = 6$$

De manera similar, podem calcular $83^{427} \,(mod\, 5)$. Com que $83 \,(mod\, 5) = 3$ tenim que

- $83^1 \,(mod\, 5) = 3^1 \,(mod\, 5) = 3$
- $83^2 \,(mod\, 5) = 3^2 \,(mod\, 5) = 4$
- $83^3 \,(mod\, 5) = 3^3 \,(mod\, 5) = 2$
- $83^4 \,(mod\, 5) = 3^4 \,(mod\, 5) = 1$
- $83^5 \,(mod\, 5) = 3^5 \,(mod\, 5) = 3$

En aquest cas les potències de 83 (o de 3) mòdul 7 es van repetint de quatre en quatre. Si agrupem els 427 termes del producte en grups de 4 (dividint 427 entre 4), quedaran 106 grups de 4 i 3 termes sobrants: $427 = 106 \cdot 4 + 3$.

$$83^{427} \,(mod\, 5) = 83^4 \cdot \overset{(106)}{\ldots} \cdot 83^4 \cdot 83 \cdot 83 \cdot 83 \,(mod\, 5) = 83^3 \,(mod\, 5) = 2$$

Els grups de 4 no aporten res, ja que hem vist que $83^4 \,(mod\, 5) = 3^4 \,(mod\, 5) = 1$ per tant només ens afecten els tres termes sobrants. No importa l'exponent sinó el residu d'aquest exponent en dividir-lo entre 4, no ens importa si l'exponent és 427 o qualsevol altre nombre congruent amb 3 (el residu de 427 entre 4) mòdul 4:

$$83^{427} \,(mod\, 5) = (83 \,(mod\, 5))^{427 \,(mod\, 4)} = 3^3 \,(mod\, 5) = 2$$

.

Activitat 11 *Calcula, de la mateixa manera que acabem de fer:*

- $2002^{111}\,(mod\,5)$
- $324^{203}\,(mod\,5)$

3.1.6 Una mica més difícil

Activitat 12 *Demostra que un nombre és congruent mòdul 9 amb la suma de les seves xifres.*

Activitat 13 *Utilitza el llenguatge de les congruències per provar els següents criteris de divisiblitat:*

- *Un nombre és divisible per 3 si la suma de les seves xifres és múltiple de tres.*
- *Un nombre és divisible per 7 si la diferència entre el nombre sense la xifra de les unitats i el doble de la xifra de les unitats és 0 o múltiple 7.*
- *Un nombre és divisible per 9 si la suma de les seves xifres és múltiple de 9.*
- *Un nombre és divisible per 11 si la diferència entre la suma de les xifres en posició parell i la suma de les xifres en posició imparell és 0 o múltiple d'11.*

3.2 El principi del colomer

3.2.1 Una idea molt simple

Si molts coloms es posen en un colomer amb pocs forats, algun dels forats haurà de tenir més d'un colom. O el que és el mateix: Si volem repartir moltes boles en poques caixes, en alguna caixa hi haurem de guardar dues o més boles. Encara que costi de creure, aquesta idea tan simple, resulta ser un recurs molt útil en una gran quantitat de problemes i situacions reals. En primer lloc, ens marcarem com a objectiu intentar expressar aquesta idea de forma una mica més precisa:

Activitat 14 *1. A què ens referim quan diem molts coloms i pocs forats ? La idea és útil si, per exemple, hi ha 20 coloms i el colomer té 25 forats? I si, en canvi, hi ha 25 coloms i 20 forats?*

2. *Si tenim quinze caixes, quina quantitat de boles hi ha d'haver com a mínim per a poder assegurar que almenys en una caixa hi ha més d'una bola? I si fossin 20 caixes? I si el nombre de caixes és k?*

3. *El nostre colomer té k forats i tenim n coloms. Quina relació hi ha d'haver entre k i n per a poder assegurar que en algun dels forats hi ha més d'un colom? Dit d'una altra manera: Si tenim ...... boles i ...... capses, amb $n > k$, aleshores en alguna capsa hi ha almenys dues boles.*

4. *Busca 5 situacions similars a les dels coloms i els colomers que serveixin d'exemple per aquesta idea.*

Una versió precisa i una mica més tècnica d'aquesta idea és la següent:

Principi de Dirichlet *Si es seleccionen k+1 elements, o més, d'un conjunt de k elements, algun element és seleccionat dues o més vegades.*

3.2.2 Aplicacions

Intenta usar el principi de Dirichlet (o del Colomer) per a resoldre els següents problemes (et pot resultar útil intentar identificar caixes i boles en cada problema!).

Activitat 15 *Un milió d'arbres creixen en un bosc. Si se sap que els arbres d'aquesta espècie mai tenen més de 800.000 fulles, podem assegurar que en qualsevol moment hi ha almenys dos arbres amb exactament el mateix nombre de fulles? Justifica la teva resposta.*

Activitat 16 *Observa que en un grup de 5 persones hi ha almenys dues persones amb el mateix nombre d'amics dins del grup. Explica perquè això és així.*

Activitat 17 *És cert que en un grup de persones qualsevol, hi ha almenys dues persones amb el mateix nombre d'amics dins del grup? Raona-ho.*

Activitat 18 *Considerem el conjunt de nombres $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.*

1. *Escull, a l'atzar 6 elements del conjunt X.*
2. *Entre els 6 nombres que has escollit, en pots trobar dos que sumin 10?*
3. *Repeteix el procediment diverses vegades. Sempre és possible trobar un parell d'elements que sumin 10? Explica aquest fet amb l'ajuda del principi del Colomer.*

Activitat 19 *Donada una col·lecció de 8 nombres enters, podem assegurar que almenys dos enters tindran el mateix residu en dividir entre 7? Raona la teva resposta.*

Activitat 20 *Donats $n + 1$ nombres naturals, n'hi ha almenys dos que donen el mateix residu en dividir-los entre n.*

Proposta 1 *Poseu-vos en parelles. Inventeu un problema cada un que pugui resoldre's amb el principi del colomer, intercanvieu-los i intenteu resoldre el problema del vostre company. A veure qui acaba primer!*

3.2.3 Versió general del principi del colomer

Si tenim 27 libres i 5 prestatges, almenys un dels 5 prestatges ha de tenir almenys 6 llibres.

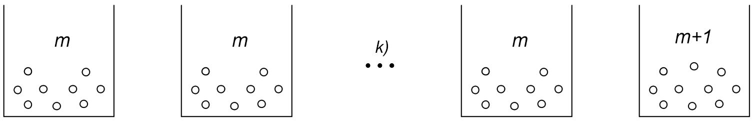
Efectivament, si intentem repartir els llibres equitativament en les cinc postades col·locarem cinc llibres a cada postada i ens sobraran dos llibres:

$$27 \text{ llibres } = 5 \text{ llibres } \cdot 5 \text{ prestatges } + 2 \text{ llibres}$$

Ara hem de repartir els dos llibres sobrants entre les cinc postades. És clar, doncs, que alguna postada tindrà almenys 6 llibres. Podem pensar en el 6 com el resultat d'intentar repartir els 27 llibres en els 5 prestatges de manera que cada postada tingui el menor nombre de llibres posibles. Més concretament:

Versió general del principi de Dirichlet *Si tenim k caixes i $n = km+1$ boles, o més, aleshores en alguna de les caixes hi ha d'haver almenys $m+1$ boles*

Posem m boles en cadascuna de les k caixes, hem col·locat km boles i ens en sobra una (o més). En afegir-la a qualsevol de les caixes, obtindrem una caixa amb m+1 boles.



Observació 1 *Més concretament, si tenim k caixes i n boles, amb $km+1 \leq n \leq k\cdot(m+1)$, aleshores podem assegurar que en alguna de les caixes hi ha d'haver almenys $m+1$ boles. Si n és més gran que $k\cdot(m+1)$ ja podem assegurar que en alguna caixa hi ha m+2 boles, i així successivament.*

Proposta 2 *Discuteix amb el teu company sobre l'observació anterior. Ajudat amb esquemes o exemples per intentar justificar l'afirmació.*

Activitat 21 *És bastant clar que si es troben 13 amics, almenys dues persones del grup han nascut el mateix mes. Ara bé, si es troben 25 amics, podem assegurar que hi ha almenys 3 persones nascudes el mateix mes. Perquè? Quantes persones s'haurien de reunir, com a mínim per a poder asegurar que almenys 4 persones han nascut el mateix mes?*

Activitat 22 *Quantes vegades haurem de tirar un dau, com a mínim, per tal de poder assegurar que un mateix resultat apareixerà:*

- *2 vegades?*
- *3 vegades?*
- *n vegades?*

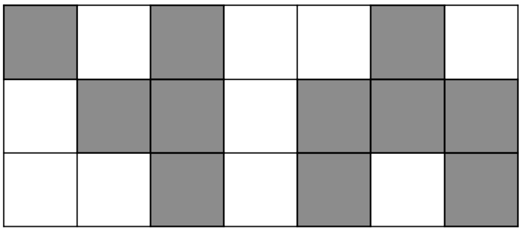
Activitat 23 *Els 27 alumnes d'una classe han fet un examen de matemàtiques. Les seves notes són: I (insufucient), S (suficient), B (bé), N (notable) i E (excel·lent). Demostra que almenys 6 alumnes han obtingut la mateixa qualificació. Si fossin 26 alumnes, seguiria sent cert? i si fossin 25?*

Activitat 24 *Quin és el menor nombre n que permet assegurar que en qualsevol conjunt de n naturals hi ha almenys 5 nombres que donen el mateix residu en dividir entre 100?*

3.2.4 Una mica més difícil

Activitat 25 *Si pintem 5 punts a l'interior d'un quadrat de diagonal 2, almenys dos dels punts estan a distància menor o igual a 1.*

Activitat 26 *Cada quadrat d'un tauler d'escacs de dimensions* 3×7 *es pinta de blanc o de negre. Prova que amb aquesta coloració, sempre és possible trobar un rectangle (format per uns quants quadrats) de manera que tingui els quatre quadrats de les cantonades del mateix color.*



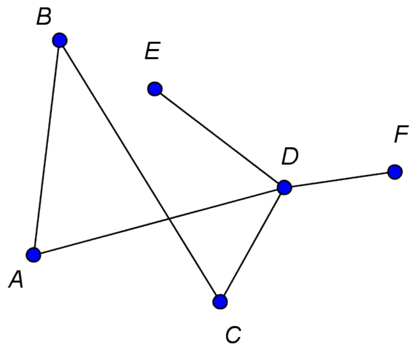
Activitat 27 *Pintem completament un full de paper amb dos colors: blau i vermell. Demostra que podem trobar dos punts del full pintats del mateix color que estiguin separats exactament 5 cm.*

3.3 Grafs

3.3.1 Introducció

Un graf és un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arestes (o arcs) que uneixen els esmentats vèrtexs entre ells. És fàcil trobar situacions de la nostra vida diària on hi intervingui, d'alguna manera, un graf. Per exemple, el mapa del metro de Barcelona, l'arbre genealògic de la nostra família, etc. En cada exemple, les arestes i el vèrtexs tenen un significat diferent. Per exemple, si considerem el graf format per la xarxa de carreteres catalanes (amb principi i fi a Catalunya) podriem considerar els vèrtexs com les ciutats per on passen les carreteres, i les arestes els trams de carretera en si.

Exemple 4 *Els grafs solen representar-se així:*



En aquest cas els vèrtexs serien $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ *i les arestes* $E = \{AB, AD, BC, CD, DE, DF\}$. *Fixa't que, per exemple,* AE *no és una aresta d'aquest graf. Si dos vèrtexs d'un grafs estan units per una aresta, es diu que els dos vèrtexs són adjacents.*

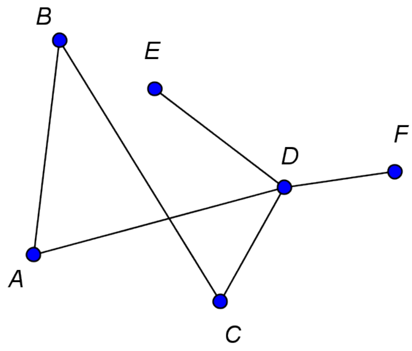
Activitat 28 *Representa:*

- *Un graf amb vèrtexs* $V = \{a, b, c, d\}$ *i arestes* $E = \{ac, bd\}$
- *Un graf amb vèrtexs* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i totes les arestes possibles.*
- *Tots els grafs de 3 vèrtexs.*

Activitat 29 *Pensa en alguna situació real que puguis representar amb un graf. Fes-ne la representació i explica quin significat tenen els vèrtexs i les arestes.*

3.3.2 El lema de l'encaixada de mans

El grau d'un vèrtex és el nombre d'arestes incidents amb aquell vèrtex. Dit d'una altra manera, el grau d'un vèrtex és el nombre d'arestes que tenen aquell vèrtex com a extrem. Per exemple, en el següent graf:



el vèrtex A té grau 2.

Activitat 30 *Digues quins són els graus dels vèrtexs* B, C, D, E *i* F *en el graf anterior.*

Activitat 31 *Observa amb atenció els següents grafs i respon:*

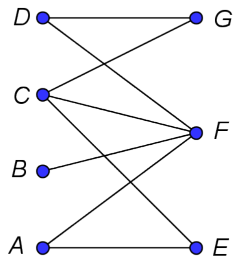


Figura 3.1: Graf 1

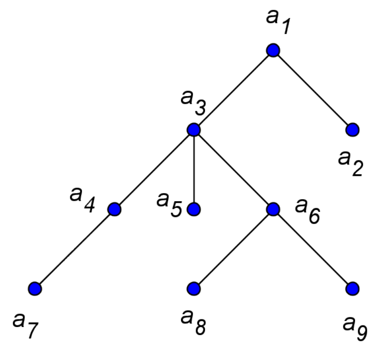


Figura 3.3: Graf 2

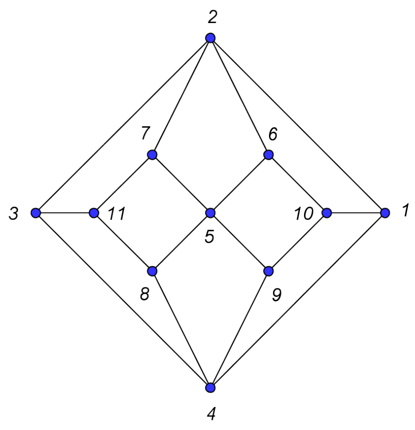


Figura 3.2: Graf 3

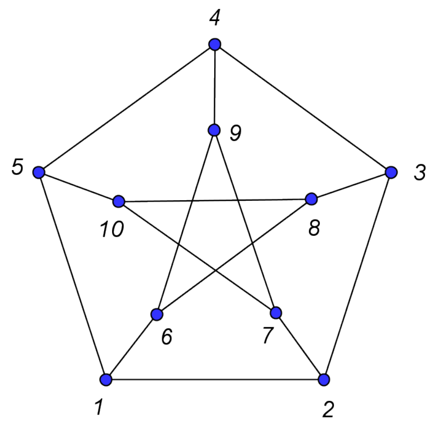


Figura 3.4: Graf 4

- *Compta els graus de cadascun dels vèrtexs en els quatre grafs.*
- *Completa les taules:*

Graf	*Suma dels graus de tots els vèrtexs*	*Nombre d'arestes*
1		
2		
3		
4		

Graf	*Nombre de vèrtexs amb grau parell*	*Nombre de vèrtexs amb grau senar*
1		
2		
3		
4		

Basant-te en les experiències d'aquesta activitat, reflexiona i respon les següents qüestions:

Activitat 32 *Quina creus que és la relació entre la suma dels graus de tots els vèrtexs d'un graf i el seu nombre d'arestes? Dóna un argument sòlid per a justificar la teva resposta.*

Lema 1 (de l'encaixada de mans) *La suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és .... el nombre d'arestes.*

Observació 2 *Alguns us deveu preguntar per què es diu lema de l'encaixada de mans? Alternativament, podriem pensar en el lema anterior dins del context següent:*

Si en una festa es pregunta en la sortida a cada persona quantes encaixades de mà ha fet, la suma total dels esmentats nombres serà el doble del nombre d'encaixades de mà que hi ha hagut en la festa.

Activitat 33 *Tenim un graf amb 15 arestes. Sabem que 3 dels seus vèrtexs tenen grau 4 i la resta tenen grau 3. Sabries dir quants vèrtexs té el nostre graf?*

Activitat 34 *És possible que la suma dels graus de tots els vèrtexs sigui un nombre senar? Per què?*

Activitat 35 *Creus que és possible que un graf tingui un nombre imparell de vèrtexs amb grau senar? Explica perquè.*

Activitat 36 *És possible que en un grup de 9 persones, cadascuna d'elles estigui familiaritzada amb exactament 5 persones del grup?*

Activitat 37 *En un país hi ha 100 ciutats i de cada ciutat en surten exactament quatre vies de ferrocarril. Quantes vies hi ha en tot el país?*

Activitat 38 *En una oficina hi ha 7 telèfons. És possible conectar per cable cada telèfon amb, exactament tres telèfons?*

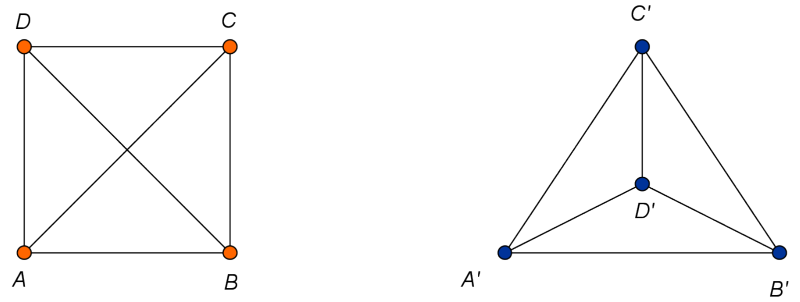
3.3.3 Grafs isomorfs

En una de les activitats inicials us hem fet representar diversos grafs. És possible que hagis notat que un mateix graf es pot representar gràficament de més d'una manera. O el que és el mateix, a vegades, dos dibuixos que semblen diferents representen essencialment el mateix graf. Per a aclarir aquesta idea, i poder ser més precisos en el llenguatge, es parla d'isomorfisme de grafs.

Donats dos grafs G_1 i G_2 direm que són isomorfs quan es compleixin les condicions següents:

- Cada vèrtex de G_1 es correspon amb un vèrtex de G_2 i cada vèrtex de G_2 es correspon amb un vèrtex de G_1.
- Donada una parella de vèrtexs adjacents de G_1, els dos vèrtexs corresponents de G_2 també són adjacents. De la mateixa manera, si dos vèrtexs són adjacents a G_2, la seva parella corresponent tambe és adjacent a G_1.

Exemple 5 *Es pot veure que els grafs següents són isomorfs:*



a través de la correspondència:

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & A' \\ B & \leftrightarrow & B' \\ C & \leftrightarrow & C' \\ D & \leftrightarrow & D' \end{array}$$

Activitat 39 *Comprova que, amb la correspondència especificada en l'exemple, els dos grafs compleixen la definició de grafs d'isomorfs. És a dir, comprova que:*

- *Cada vèrtex del graf de l'esquerra es correspon amb exactament un vèrtex del graf de la dreta i viceversa.*
- *Si dos vèrtexs són adjacents al graf de l'esquerra, la parella de vèrtexs corresponents també ho són a la dreta i viceversa.*

Observació 3 *Com pots comprovar, dos grafs isomorfs són, essencialment, el mateix graf. En general, es pot pensar que quan resols un problema amb un graf concret en realitat el resols per a tots els grafs isomorfs a aquell. Aquest és un recurs molt valuós i molt utilitzat en matemàtiques.*

Activitat 40 *Justifica, raonadament les següents afirmacions:*

- *Dos grafs isomorfs tenen el mateix nombre de vèrtexs.*
- *Dos grafs isomorfs tenen el mateix nombre de arestes.*
- *Dos grafs isomorfs tenen el mateix nombre de vèrtexs d'un grau fixat.*
- *Si dos grafs són isomorfs, no és possible que un sigui conex (d'una sola peça) i l'altre no.*

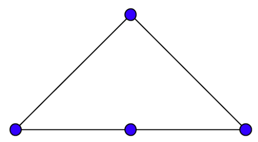
Si les afirmacions de l'activitat anterior es compleixen, podem sospitar que dos grafs són isomorfs, però no en podem estar segurs. Per comprovar-ho, hem d'establir l'equivalència entre ells: donar una correspondència vèrtex a vèrtex i comprovar que si dos vèrtexs estan units en un graf, també ho estan en l'altre (comprovar que es compleix la definició que hem donat al principi). Per trobar la correspondència, sovint és útil imaginar com es pot passar d'un graf a l'altre, tot deformant-lo.

Proposta 3 *Treballeu en parelles. Que cadascun de vosaltres dos dibuixi un graf. Passeu el paper al vostre company i que dibuixi un graf isomorf al que li heu donat. Torneu-vos a intercanviar els fulls. Sou capaços d'establir la correspondència entre els dos grafs?*

Activitat 41 *Dibuixa tots els grafs no-isomorfs de 4 vèrtexs.*

Activitat 42 *Identifica les parelles de grafs isomorfs. En cas que no siguin isomorfs, justifica-ho i en cas que ho siguin, troba la correspondència entre els vèrtexs.*

a. Parella 1:



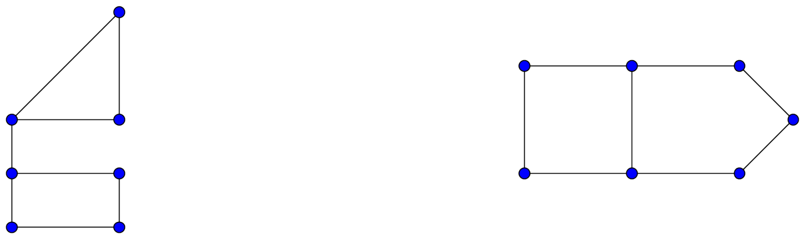
b. Parella 2

c. Parella 3

d. Parella 4

e. Parella 5

f. Parella 6



g. Parella 7

h. Parella 8

3.4 La circumferència

Tots tenim clara una idea mental de què és una circumferència. No obstant, en matemàtiques, sovint no n'hi ha prou amb això. També hem de ser capaços de construir una definició precisa d'aquesta idea, que ens permeti transmetre el concepte, i treballar-hi amb rigor i sense ambigüitats.

Activitat 43 *Intenta definir de manera precisa, allò que entens per circumferència.*

Un cop fet l'esforç d'intentar construir la teva pròpa definició, per unificar el concepte podem definir la circumferència com:

El lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fixat.

És important entendre bé les definicions, llegeix-la les vegades que calguin i prent-te el teu temps per comprendre-la totalment.

3.4.1 Com determinar una cicumferència

Sembla clar que per determinar una circumferència en tenim prou donant un centre i un radi. Per construir-la punxem amb el compàs en el centre i tracem la circumferia obrint el compàs la longitud determinada pel radi. Ara bé, donats dos punts, com puc trobar una circumferència que hi passi?

Activitat 44 *Donats dos punts, és possible trobar una circumferència que passi pels dos punts? Quantes en pots trobar? Explica com les trobes.*

Activitat 45 *Donats tres punts, és possible trobar una circumferencia que passi pels tres punts? Quantes en pots trobar? Explica com les construeixes.*

Activitat 46 *Quin és el nombre mínim de punts necessaris per a determinar una circumferència?*

Activitat 47 *Creus que sempre és possible inscriure un quadrilàter en una circumferència? Respon raonadament.*

3.4.2 Angles i circumferències

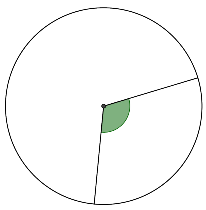


Figura 3.5: Angle central

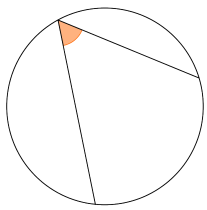


Figura 3.6: Angle inscrit

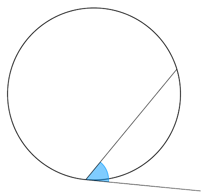
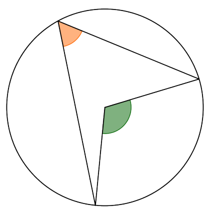


Figura 3.7: Angle semi-inscrit

Quina relació creus que hi ha entre un angle inscrit en una circumferència i un angle central que abraci el mateix arc?



Activitat 48 (Conjectura) *Segueix la teva intuïció per a proposar una resposta a aquesta qüestió. Utilitzar el GeoGebra per experimentar una mica et pot ajudar a fer una bona conjectura.*

Ja saps que en matemàtiques, les afirmacions necessiten ser justificades. Per a demostrar la conjectura que has fet, separarem el problema en tres casos:

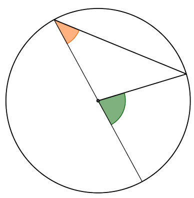


Figura 3.8: **Cas 1**. Un costat de l'angle inscrit és un diàmetre

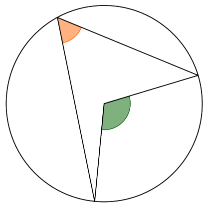


Figura 3.9: **Cas 2**. El centre de la circumferència és interior a l'angle inscrit

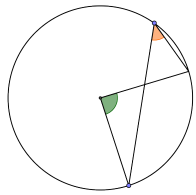
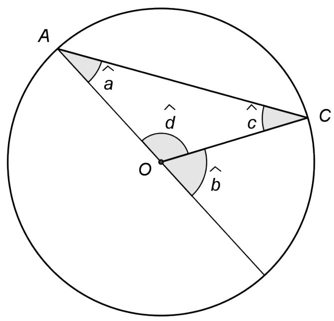


Figura 3.10: **Cas 3**. El centre de la circumferència és exterior a l'angle inscrit

Activitat 49 *Demostrarem la conjectura en el cas 1, pas per pas. Explica raonadament perquè són certes les afirmacions següents:*



1. *El triangle AOC és isòscel·les.*
2. *Els angles $\widehat{a}$ i $\widehat{c}$ són iguals.*
3. $\widehat{b}+\widehat{d}=180^o$.
4. $\widehat{a}+\widehat{c}+\widehat{d}=2\widehat{a}+\widehat{d}=180$.
5. $2\widehat{a}=\widehat{b}$.

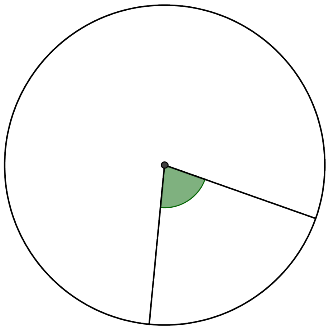
Activitat 50 *Utilitzant el cas 1, i seguint estratègies similars, demostra la conjectura que hem fet en general, pels casos 2 i 3.*

Activitat 51 *Aprofita alguna de les demostracions anteriors i adapta-la al cas que l'angle central mesuri més de 180^o^.*

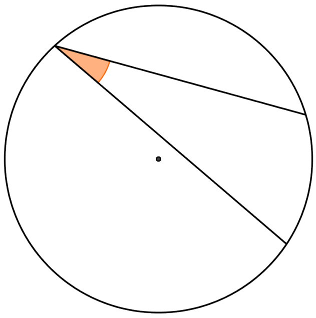
3.4.3 Aplicacions

La propietat que hem treballat sobre angles inscrits i centrals ens permet deduïr força propietats interessants. Utilitza-la per a resoldre els problemes següents:

Activitat 52 *Dibuixa 4 angles inscrits en la circumferència que mesurin la meitat de l'angle central de la figura:*



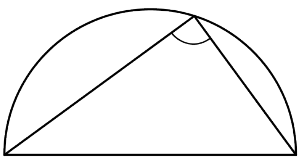
Activitat 53 *Dibuixa 3 angles inscrits en la circumferència següent que tinguin la mateixa mesura que l'angle de la figura:*



Completa:

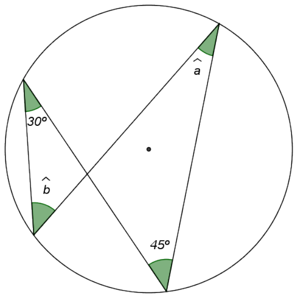
Si dos angles inscrits en una circumferència abracen el mateix arc, aleshores ....

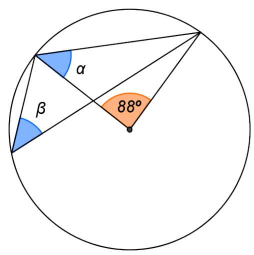
Activitat 54 *Quant mesura un angle inscrit en una semicircumferència?*

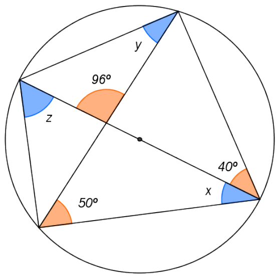


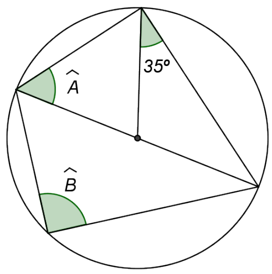
Activitat 55 *Sense necessitat de fer cap càlcul, construeix, amb regle i compàs, un triangle rectangle amb un catet de 3 cm de longitud i la hipotenusa de 5 cm.*

Activitat 56 *Troba el valor dels angles indicats amb lletres.*









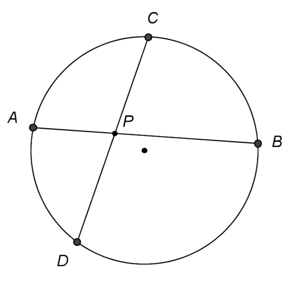
3.4.4 Potència d'un punt respecte una circumferència

Siguin P un punt del pla i $\mathcal{C}$ una circumferència de radi r. Si d és la distància que separa P del centre de la circumferència, podem definir la potència del punt P respecte la circumferència $\mathcal{C}$ com:

$$Pot(P, \mathcal{C}) = d^2 - r^2$$

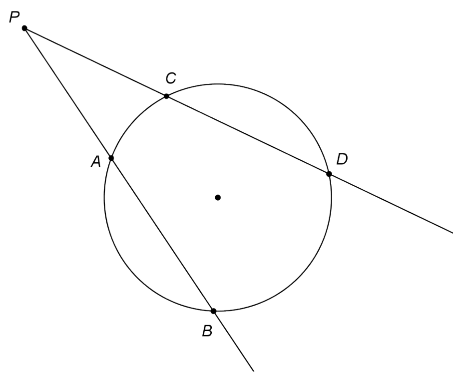
Activitat 57 *Quina és la potència de P si el punt cau a sobre la circumferència? Què pots dir de la potència d'un punt interior a la circumferència? i d'un punt exterior?*

Activitat 58 *Donats una circumferència $\mathcal{C}$ i un punt interior P, tracem segments per P que intersequin $\mathcal{C}$ de la manera que es mostra en la figura:*



Demostra que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. (Traça els segments AD i BC. Utilitzant les propietats que coneixes dels angles inscrits, demostra que els triangles ADP i PBC són semblants. Aprofita la relació de semblança per acabar el problema.)

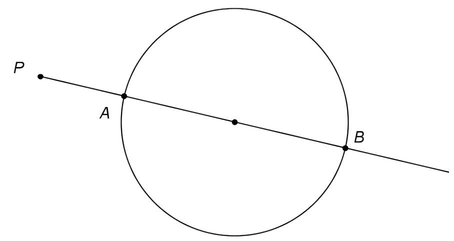
Activitat 59 *Donats una circumferència $\mathcal{C}$ i un punt exterior P, tracem dues semirectes a partir de P que intersequin $\mathcal{C}$ de la manera que es mostra en la figura:*



Amb un procediment similar a l'anterior, demostra que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Amb els exercicis anteriors, hem vist que el valor del producte $PA \cdot PB$ no depèn del segment escollit, només del punt P i de la circumferència $\mathcal{C}$. Tot i així no n'hem pogut calcular el valor. Per fer-ho, escollirem un segment especialment senzill, un segment que passi pel centre:

Activitat 60 *Si d és la distància de P al centre de la circumferència i r el seu radi, intenta escriure el valor de $PA \cdot PB$ en termes de d i r. Quina relació té aquest valor amb la potència de P respecte la circumferència?*



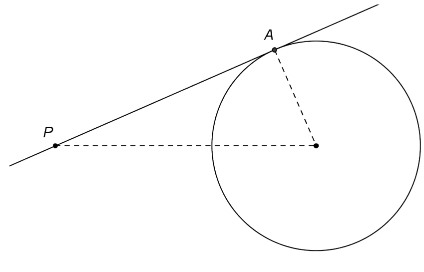
(tingues en compte que la semirrecta passa pel centre de le circumferència!)

Amb les activitats anteriors hem vist que:

Teorema 1 (Potència d'un punt) *Donats un punt P i una circumferència $\mathcal{C}$, qualsevol segment per P que talli $\mathcal{C}$ en dos punts A i B, compleix que*

$$Pot(P, \mathcal{C}) = d^2 - r^2 = PA \cdot PB$$

Activitat 61 *Hem traçat la tangent a $\mathcal{C}$ que passa per P. Calcula quant val PA^2 i expressa-ho en termes de d i r. Relaciona-ho amb el concepte de potència.*

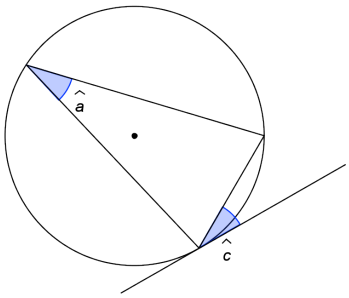


3.4.5 Una mica més difícil

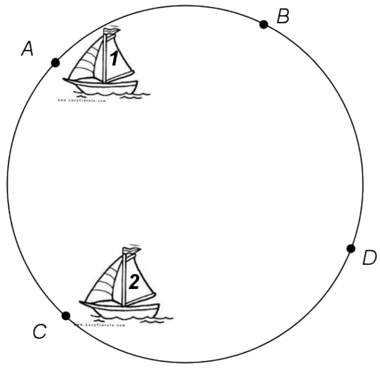
Activitat 62 *Demostra que si un quadrilàter és inscriptible en una circumferència, aleshores els angles oposats són suplementaris (sumen 180º).*

Activitat 63 *Demostra que si els angles oposats d'un quadrilàter sumen 180º, aleshores, el quadrilàter és inscriptible en una circumferència.*

Activitat 64 *Demostra que l'angle semi-inscrit $\widehat{c}$ és igual a l'angle inscrit $\widehat{a}$.*



Activitat 65 *Els vaixells 1 i 2, que viatgen amb velocitats constants (no necessàriament iguals), parteixen simultàniament dels molls A i C, respectivament, de la vora d'un llac circular:*



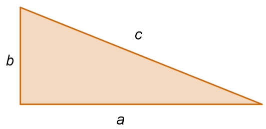
Els capitans saben que si es dirigeixen en línia recta als molls D i B, respectivament, aleshores col·lisionen. Prova que si els vaixells intercanvien les seves destinacions, aleshores arriben als molls B i D, respectivament, al mateix temps.

3.5 Demostracions visuals

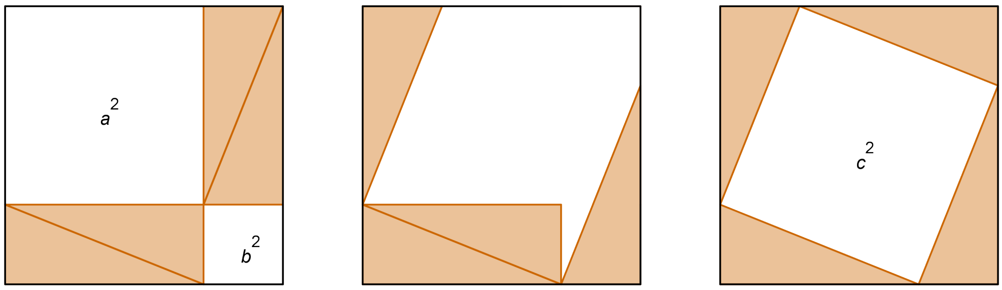
És important tenir clar que, en matemàtiques, totes les afirmacions s'han de justificar. Segurament esteu familiaritzats amb molts resultats com el teorema de Pitàgores, la suma dels angles d'un triangle, o la fòrmula per a sumar els n primers naturals consecutius,... però teniu clar perquè són certs aquests resultats? Sabrieu explicar per quin motiu funcionen aquestes fórmules?

Sovint, hi ha diverses estratègies per a provar un resultat. A continuació treballarem amb demostracions visuals. A vegades poden ser difícils d'entendre però gairebé sempre són molt menys feixugues que les demostracions algebraiques. Possiblement un dels exemples més elegants de demostració visual que es pot trobar és el següent:

Donat un triabgle rectangle amb catets a i b, i hipotenusa c:



si en fem 4 còpies, les distribuïm i les desplacem hàbilment, podem veure que:

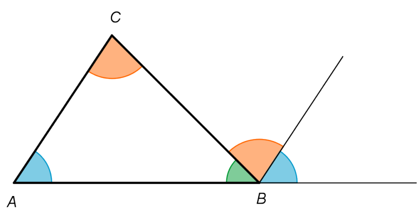


(fixa't que l'àrea blanca sempre és la mateixa!)

Activitat 66 *Quin famós teorema sobre triangles rectangles es demostra amb aquesta seqüència de dibuixos? Raona-ho.*

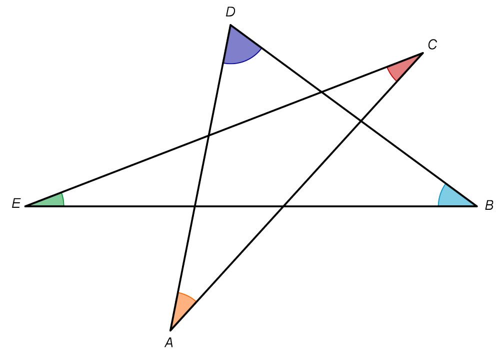
3.5.1 Angles interiors d'un polígon

Activitat 67 *Observa amb deteniment:*

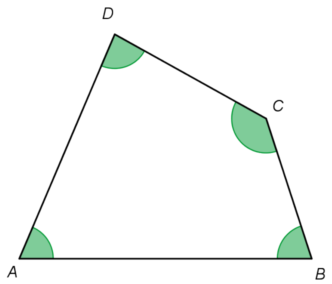


Els dos angles taronges són iguals. Per què? Què en pots dir, de la parella d'angles blaus? A partir del dibuix, dedueix el valor de la suma dels tres angles d'un triangle i explica raonadament el procés que has seguit.

Activitat 68 *Segueix una estratègia similar a l'anterior per a calcular $A + B + C + D + E$ en el cas següent:*



Activitat 69 *Aprofitant que ja saps quan val la suma dels tres angles d'un triangle, sabries dir quan sumen els quatre angles interiors d'un quadrilàter qualsevol?*



(dividir el quadrilàter en dos triangles et pot ser de molta ajuda!)

Activitat 70 *Calcula la suma dels angles interiors d'un pentàgon. Si el pentàgon és regular, quan val cadascun dels angles interiors? Podries fer el mateix si enlloc d'un pentàgon es tractes d'un hexàgon?*

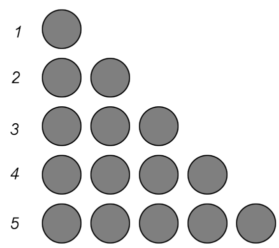
Activitat 71 *Calcula la suma dels angles interiors d'un polígon d'n costats. Si el polígon és regular, quan mesura cada angle?*

3.5.2 Elements gràfics representant nombres

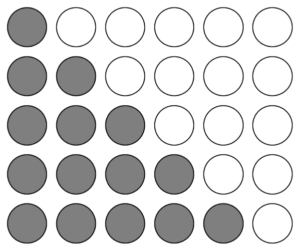
Potser coneixes algun procediment per a calcular ràpidament una suma com aquesta:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

És clar que sumar tots els termes és realment lent i pesat! Representar aquest nombres amb elements gràfics ens pot ajudar a trobar una manera de fer aquesta mena de sumes de manera fàcil i ràpida. Per exemple, la suma $1+2+3+4+5$ es pot representar com:



i aleshores , calcular la suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ és equivalent a comptar el nombre de cercles. Ara bé, se t'acudeix alguna manera de calcular el nombre de cercles sense necessitat de comptar-los un per un? Mira bé aquest dibuix:



Cada fila té 6 cercles, i tenim un total de 5 files per tant, és fàcil veure que en aquest dibuix hi ha $6 \cdot 5 = 30$ cercles en total. Si ens hi fixem bé, exactament la meitat d'aquests són ombrejats. Per tant els cercles que voliem comptar són 15. D'aquesta manera,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

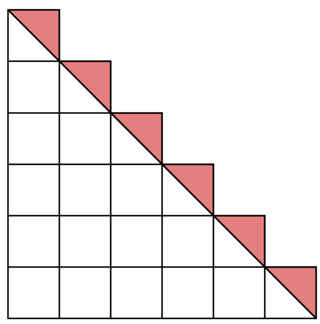
realitzar la suma és fàcil i ràpid.

Activitat 72 *Usant el procediment anterior, quant val la suma* $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$*? i la suma* $1+2+3+\ldots+99+100$*? Escriu una fórmula que ens permeti sumar els n primers nombres naturals:*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

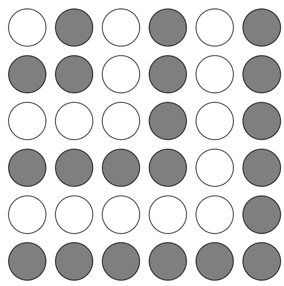
Aquests nombres s'anomenen nombres triangulars: $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Activitat 73 *El següent esquema demostra d'una altra manera la fórmula per calcular nombres triangulars* $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$*:*

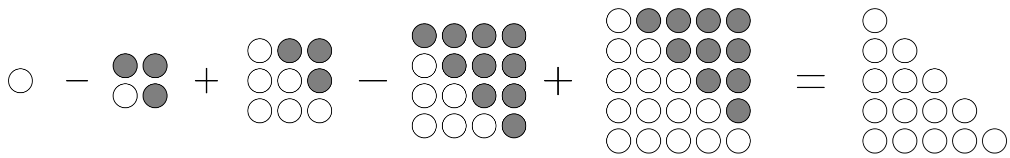


Explica raonadament com es pot deduïr la fórmula a partir del dibuix.

Activitat 74 *Observa aquest esquema amb atenció i dedueix-ne una fórmula per a sumar senars consecutius* $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$.



Activitat 75 *Amb raonaments similars als anteriors, quina fórmula pots deduir a partir d'aquest esquema? escriu-la de la forma més general possible.*



Activitat 76 $T_n = 1+2+\ldots+n$ *denota l'enèssim nombre triangular. Elabora esquemes amb cercles similars als anteriors per demostrar les següents igualtats:*

(a) $T_{n-1} + T_n = n^2$

(b) $8T_n + 1 = (2n+1)^2$

(c) $T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$

(d) $T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}$

(e) $T_{3n+1} - T_n = (2n+1)^2$

(f) $T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1} = (2n+1)^2$

Activitat 77 *Descobreix els patrons i representa amb esquemes de cercles les sumes "ascendents-descendents"següents:*

(a)

$$\begin{aligned} 1+2+1 &= 2^2 \\ 1+2+3+2+1 &= 3^2 \\ 1+2+3+4+3+2+1 &= 4^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

(b)

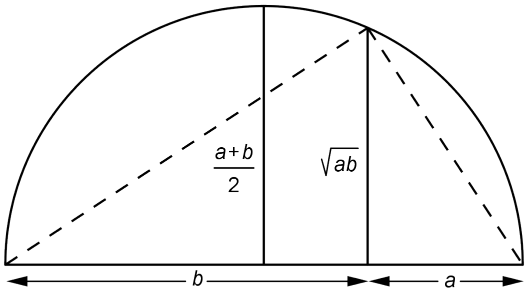
$$\begin{aligned} 1+3+1 &= 1^2+2^2 \\ 1+3+5+3+1 &= 2^2+3^2 \\ 1+3+5+7+5+3+1 &= 3^2+4^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

3.5.3 Desigualtats

Hem vist com els raonaments visuals ens servien per a justificar tan resultats geomètrics com fórmules aritmètiques. En aquesta part usarem aquesttipus de raonaments per a deduir desigualtats.

Tots coneixem la mitjana aritmètica entre dos nombres a i b, però hi ha altres mitjanes. Per exemple, la mitjana geomètrica de dos nombres positius a i b és $\sqrt{ab}$. Es poden comparar aquestes dues mitjanes? La resposta és si. La figura següent demostra que si $0 < a < b$ aleshores la mitjana aritmètica (AM) és mé gran que la mitjana geomètrica (GM) i que ambdues estan entre a i b:

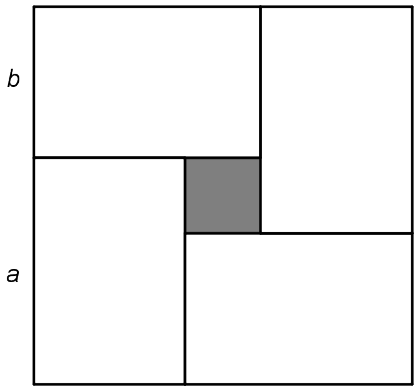
$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$



la desigualtat entre les dues mitjanes es coneix amb el nom de desigualtat AM-GM.

Activitat 78 *Explica raonadament perquè els segments del dibuix mesuren* $AM = \frac{a+b}{2}$ *i* $GM = \sqrt{ab}$*, i com es pot extreure del dibuix la desigualtat AM-GM.*

Activitat 79 *Una altra manera de provar la desigualtat AM-GM, és a patir de la figura següent:*



(a) *És clar que l'àrea total és més gran que l'àrea dels quatre rectangles. Expressa algebraicament aquesta relació entre les àrees.*

(b) *A partir de l'exrpressió algebraica que has extret del dibuix, dedueix la desigualtat AM-GM.*

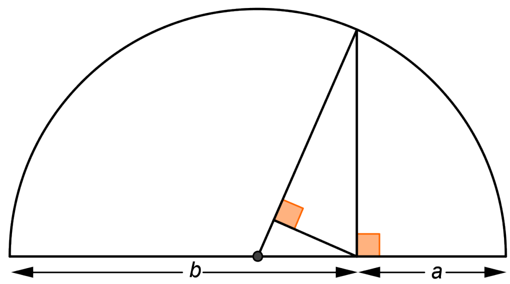
Ara ja coneixem dues mitjanes: l'aritmètica i la geomètrica. Però encara hi ha altres mitjanes d'interés. Per exemple la mitjana harmònica (HM) entre dos nombres positius a i b és

$$\frac{2ab}{a+b}$$

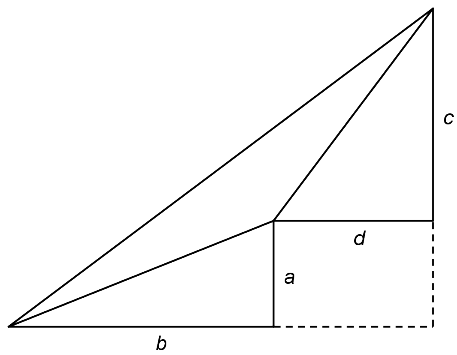
i també està entre a i b. Serà possible comparar aquesta nova mitjana amb les dues mitjanes anteriors?

Activitat 80 (a) *Localitza en la figura següent les tres mitjanes AM, GM i HM.*

(b) A partir del dibuix estableix, de manera raonada, una desigualtat entre les tres mitjanes.



Activitat 81 *Siguin a, b, c i d quatre nombres positius. En l'esquema següent apareixen representats com a segments. Observa detenidament i contesta:*



(a) Justifica, a partir de l'esquema que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

(b) Localitza en el dibuix un segment de longitud $a + c$ i un altre de longitud $b + d$.

(c) Completa:

Donats a, b, c i d quatre nombres positius tals que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, aleshores:

$$\frac{a}{b} < \underline{\qquad} < \frac{c}{d}$$

(Interpreta les fraccions com a pendents)

4 Elecció dels temes i encaix dins el currículum

Evidentment, els temes escollits per a elaborar el material no han estat seleccionats arbitràriament. El criteri general que he seguit ha estat escollir temes amb poca càrrega teòrica i amb moltes possibilitats pràctiques. El material ha estat dissenyat pensant en alumnes de la segona etapa de l'ESO: 3r i 4t d'ESO. Recomano utilitzar els dossiers en alumnes d'aquestes edats bàsicament per dos motius:

- Nivell de maduresa, capacitat d'abstracció i de raonament matemàtics.
- Conceptes previs.

Tot i que són escassos, i molt bàsics, els dossiers requereixen algun concepte previ sobre divisibilitat o resultats bàsics sobre triangles (teorema de Pitàgores, teorema de l'altura, concepte de semblança). Tot i això, en casos extraordinaris, els dossiers podrien ser usats per alumnes de cursos inferiors com 2n o fins i tot 1r d'ESO.

El meu objectiu era donar a conèixer als alumnes unes matemàtiques diferents, allunyant-me dels procediments tècnics i mecànics tant abundants en les classes de matemàtiques ordinàries de secundària. Contraposant-me a aquest estil de fer matemàtiques, amb aquest material intento presentar unes matemàtiques basades en el raonament, donant valor a la capacitat i l'habilitat dels alumnes per a manipular els seus coneixements amb l'objectiu de resoldre problemes. Els temes que he escollit (almenys a aquest nivell) permeten proposar problemes molt difícils sense la necessitat de tractar amb continguts teòrics feixucs o complicats. De la mateixa manera, també és possible plantejar problemes molt senzills i bàsics sobre aquests mateixos temes. Aquesta versatilitat, i la possibilitat de graduar la dificultat a plaer, m'han permès elaborar un material obert a una àmplia tipologia d'alumnat. A més, el dossier de cada tema ajuda a l'alumne a evolucionar i a millorar de manera autònoma i progressiva.

Ara bé, es de menester preguntar-se com encaixa la meva elecció i el meu criteri personal dins el marc del currículum de secundària. Si bé els temes que he escollit no apareixen estrictament en l'apartat de continguts del currículum, treballant amb el material que he elaborat es cobreixen diversos objectius curriculars. Sense anar més lluny, en la secció introductòria del capítol de matemàtiques del currículum es desglossa acuradament la competència matemàtica en 7 punts que podriem anomenar, subcompetències:

- Pensar matemàticament.
- Raonar matemàticament.
- Plantejar-se i resoldre problemes.
- Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic.
- Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques i els instruments per fer matemàtiques.
- Interpretar i representar expressions, processos i resultats matemàtics.
- Comunicar als altres el treball i els descobriments que s'han fet utilitzant el llenguatge matemàtic.

Malgrat l'ambigüitat d'alguna d'elles, crec que es pot afirmar que, globalment, el material que he elaborat treballa, amb més o menys profunditat, totes les subcompetències llistades. Enmig de la llarga llista d'activitats hi ha alguns problemes de raonament matemàtic molt exigents, així com propostes de treball en parelles on posen a prova indefectiblement la seva capacitat per a transmetre coneixements matemàtics. Així, sembla just esmentar que els dossiers resulten útils per a millorar les habilitats competencials de l'alumne.

Més endavant, en el capítol de matemàtiques del curriculum, es parla del valor dels processos matemàtics. Més concretament, enumera quatre aspectes lligats a les matemàtiques que anomena processos:

1. Resolució de problemes.

2. Raonament i prova.
3. Comunicació i representació.
4. Connexió entre els diferents continguts.

S'explica, en el mateix text, que els quatre processos s'haurien de treballar des de tots els blocs de contingut i qualsevol part del temari. D'aquesta manera, entenc que la millora de les habilitats de l'alumne en aquests processos hauria de marcar una mica la forma d'enfocar la feina. Com es pot entendre en el paràgraf inicial, els dossiers que he elaborat caminen en aquest sentit.

En primer lloc, el procés 1, resolució de problemes, està present en tots els dossiers, i de fet podriem dir que és l'eix central del material. Segurament és el més treballat dels quatre processos.

En segon lloc, m'agradaria posar força èmfasi en el segon procés. El raonament i la prova són l'essència de les matemàtiques, i de qualsevol ciència, però en especial de les matemàtiques. És fàcil, i de fet molt habitual, que els alumnes que han finalitzat l'etapa de secundària amb èxit no estiguin familiaritzats amb el procés de raonar per a provar o demostrar un resultat. De fet, el problema va més enllà d'això, no és que no comprenguin el procés de demostració, sinó que ni tan sols el coneixen. La majoria d'alumnes s'han enganxat a la dinàmica de creure's els resultats i aprofitar-los per generar els automatismes necessaris per a resoldre els exercicis proposats com un simple tràmit. "Fan matemàtiques"sense cap mena de profunditat en el raonament, ni tan sols es plantejen la possibilitat de dubtar de la validesa d'una afirmació amb contingut matemàtic. Amb la curta i modesta experiència personal adquirida com a professor de repàs els últims anys i durant les pràctiques d'aquest curs, m'atreveixo a afirmar que és molt difícil, gairebé impossible, trobar un estudiant d'ESO que comprengui la necessitat de provar un resultat per a verificar-ne la validesa. Malauradament, són molt pocs els que entenen que, en matemàtiques, totes les afirmacions tenen significat propi i necessiten ser justificades raonadament amb arguments inqüestionables. Evidentment no són els alumnes els responsables d'aquesta situació, si no l'enfocament mecànic, tècnic i rutinari de classes ordinàries de matemàtiques. Malauradament, aquest apartat del curriculum sembla haver passat per alt a molts docents dels nostres centres. En els dossiers que he dissenyat, he intentat donar molta importància a aquest procés, introduïnt la idea de prova de forma gradual, permetent que els alumnes s'hi familiaritzin progressivament.

Els dos últims processos són menys protagonistes en el material que he elaborat, però tot i això juguen un paper clau en algun dossier. Concretament el procés 4, és omnipresent en el dossier sobre demostracions visuals on s'utilitzen la visualització i conceptes geomètrics per a provar resultats sobre aritmètica, deigualtats... D'altra banda el procés 3 es treballa des de tots els dossiers, a través de la insistència de les activitats en demanar respostes justificades i explicades raonadament, obligant als alumnes a organitzar les idees i expresar-les de forma clara i precisa.

En resum, podriem dir que, malgrat treballar continguts no curriculars, els dossiers que he elaborat van plenament d'acord amb el currículum de matemàtiques a nivell competencial i a nivell de processos matemàtics. De fet crec que, en certa manera, la metodologia de treball proposada en els dossiers s'aproxima més alguns objectius del currículum que no pas els mètodes habituals d'algunes classes ordinàries de matemàtiques a secundària.

5 Recursos constructivistes

En la secció anetrior he parlat dels criteris que he seguit per escollir els temes dels dossiers, i n'he avaluat el valor curricular. A continuació parlaré de quins són els processos o idees generals que he usat per a estructurar els dossiers.

Com a criteri fonamental, m'he basat en l'objectiu d'aconseguir que siguin els mateixos alumnes els constructors de la teoria. Com he explicat extensament abans, els continguts dels dossiers tenen poca càrrega teòrica, no obstant, en cada tema cal remarcar algun resultat teòric bàsic de vital importància per a la resolució de problemes posteriors. Aprofitant el fet que, els temes tenen una teoria lleugera i poc extensa, he optat per estructurar els dossiers en forma de guia per ajudar a l'alumne a deduir aquests resultats teòrics per ell mateix. Com a norma general, cada apartat comença amb problemes senzills que serveixin com a eines d'experimentació pels alumnes. A continuació plantejo preguntes de caire menys pràctic, que guiin la intuició de l'alumne pel camí correcte i finalment es planteja la pregunta que ha d'obtenir com a resposta el resultat teòric desitjat. D'aquesta manera, gràcies a l'ajuda del dossier, són els mateixos alumnes els que "descobreixen"els resultats teòrics que posteriorment els ajudaran a resoldre problemes. Seguint aquest procés t'assegures que l'alumne fa una comprensió més o menys profunda del contingut teòric del tema, ja que és ell mateix el que ha deduït la norma general, o el patró que segueixen els problemes a partir de la fase d'experimentació. En certa manera, es podria dir que els dossiers estan estructurats com a guies d'investigació o exploració.

Al meu entendre, aquesta manera d'estructurar el material didàctic està força conforme amb la filosofia d'ensenyament plasmada en el currículum. Les directrius que he seguit per a elaborar el material d'aquesta manera deriven de les idees fonamentals del constructivisme igual que algunes de les idees que apareixen en el currículum de secundària. Aquest corrent, inicialment impulsat per J. Piaget, inclòs en el marc de la pedagogia es basa en idees com:

- La singularitat de cada individu quan a habilitats d'aprenentatge.
- Els professors tenen el paper de facilitadors.
- L'aprenentatge és un procés social i actiu per part de l'alumne.
- L'alumne construeix el seu propi esquema de coneixements a partir dels coneixements previs i a través de la pròpia experiència.

El primer punt de la llista es traduiria en llenguatge actual i adaptat a la realitat dels nostres centres, com atenció a la diversitat. En el meu cas, el material que he elaborat està enfocat a una tipologia determinada d'alumnat, una de les moltes seccions diferents dins d'aquesta diversitat.

Els últims tres punts, mirats com a conjunt, defineixen perfectament la intenció amb la que he dissenyat el material. La informació del dossier està escollida i organitzada per a ajudar o guiar a l'alumne a deduir la teoria pròpia del tema a partir d'exercicis de caire experimental, obligant a l'estudiant a prendre part activa en el procés d'aprenentatge.

6 Gestió del material

Fins ara la meva intenció era deixa clar el meu criteri de selecció de continguts i el procediment utilitzat per organitzar i estructurar la informació en els dossiers. A continuació, parlaré de la manera d'utilitzar el material que he elaborat. A continuació es proposen unes possibles instruccions d'ús dels dossiers, o dit d'una altra manera, diverses alternatives per portar el material a l'aula. Aquestes idees no han estat provades i per tant a continuació només faig una petita previsió dels aventatges i els inconvenients que poden tenir cadascuna d'elles.

6.1 Aprenentatge autònom

Aquesta opció és la que exigeix un grau d'autonomia més elevat per part de l'alumne. Per tant és convenient avaluar les capacitats i la motivació de l'estudiant si es pretèn procedir d'aquesta manera. Aquesta opció consisteix en oferir al material a l'alumne, que per iniciativa personal i de manera individual treballarà a casa amb certa regularitat. El professor té la única responsabilitat de revisar periòdicament els avenços o progressos de l'alumne i mantenir-se disponible a resoldre dubtes i a oferir ajuda quan l'estudiant ho requereixi. Cal ser molt flexible i adaptar-se al ritme que marca l'alumne que, no oblidem que està treballant per iniciativa personal. No obstant, com a norma general, el profesor i l'alumne podrien tenir una cita setmanal per comentar els progressos, resoldre dubtes o reconduir la direcció de les intuicions de l'alumne. Establir una regularitat ajudarà a l'alumne a treballar amb constància i evolucionar satisfactòriament en el procès guiat pels dossiers.

Aquesta forma d'ús és possible gràcies al caràcter constructiu dels dossiers. Tot i això, aquesta opció és molt exigent per l'alumne i està destinada a un grup reduït d'estudiants, amb bona capacitat i un caràcter molt concret. Malauradament, el volum de feina d'un professor de secundària és molt gran, i segurament aquesta és l'opció més factible per a dur els dossiers a l'aula, per ser la menys compromesa i sacrificada pel professor.

6.2 Extraescolar

Aquesta opció requereix fortament de la motivació de l'alumne, però el grau d'autonomia que se li exigeix és inferior. En aquesta opció, projectes com l'ESTALMAT marquen un possible camí a seguir. Alternativament, a nivell de professor individual, podrien organitzar-se iniciatives més modestes a nivell de centre o fins i tot a nivell de ciutat o comarca. Sempre i quan, és clar, hi hagi la possibilitat de trobar finançament i espai pel projecte. Aquests dossiers poden treballar-se amb alumnes de diferents edats com ja he comentat al principi. També hi ha la possibilitat d'agrupar alumnes per nivells en cas de ser necessari. Amb aquesta alternativa, el professor pren un paper més actiu en el procés d'aprenentatge de l'alumne, fet que facilita el seguiment i el control dels progressos de l'estudiant. Dins aquest context, els dossiers poden ser un recurs més en els que basar algunes sessions, però també existeix la possibilitat d'estructurar el curs usant els dossiers com a recurs principal.

6.3 Grups partits

Habitualment, els centres de secundària disposen d'una hora setmanal de matemàtiques en la que el grup es divideix en dos per tal que els alumnes rebin una atenció més personalitzada. Sovint, s'opta per agrupar els alumnes per nivells. Un dels grups destina aquestes sessions a repassar i reforçar els continguts treballats a la classe ordinària. L'altre grup, el format per alumnes amb un nivell de matemàtiques més elevat, aprofita les sessions per a dedicar-les a avançar matèria, resoldre problemes relacionats amb el tema, o a activitats com el *Fem matemàtiques* o la resolució de problemes de les proves *Cangur*. El material que he elaborat podria encaixar perfectament en aquest tipus de sessions. El professor que s'ocupa d'aquest grup d'alumnes té l'opció de programar 5 o 6 sessions de treball en un dels dossiers, o fins i organitzar totes les sessions del curs amb aquests materials (o altres materials similars). Treballant en aquests dossiers els alumnes milloren les seves capacitats competencials i les seves habilitats en processos matemàtics sense influir en el temari del curs, ja que els continguts dels dossiers, com he dit abans, no són pròpiament curriculars. D'aquesta manera, podriem sintetitzar la idea dient que es dediquen aquestes sessions especials, de grup partit, a guanyar maduresa a nivell de raonament i processos matemàtics, i segons el meu criteri, això són sessions ben aprofitades.

Aquesta opció és còmode per al professor, però no sempre és possible. Partir el grup en alguna sessió setmanal en les matèries instumentals no és una norma establerta per a la gestió de la diversitat, sinó que és una opció de centre. Així doncs, parlant amb precisió, aquesta és una opcío còmode pel professor sempre i quan disposi d'aquesta oportunitat.

6.4 Crèdit variable

Els centres de secundària avui en dia tenen la opció de dedicar una hora setmanal a fer un crèdit variable, que els alumnes escullen dins l'oferta del centre. Cada institut gestiona com prefereix aquestes hores. Molts opten per afegir una hora setmenal a alguna matèria instrumental, sense donar cap opció d'escollir a l'alumnat mentre que d'altres opten per oferir una ventall de crèdits variables per que els alumnes escullin i després fan la millor assignació possible en funció de les preferències , les places i la demanda de cada assignatura. Finalment hi ha centres que combinen les dues opcions, per exemple: a primer afegeixen una hora d'instrumentals i a segon oferten diversos crèdits variables.

En qualsevol cas, aquesta és una bona oportunitat per a posar en pràcitca el material que he elaborat. És possible dissenyar la programació d'una assignatura optativa (o crèdit variable) d'una sessió setmanal i d'un curs de durada que tingui com a recurs principal els dossiers presentats. Aquesta opció és sens dubte la que ofereix més possibilitats al professor, facilita el seguiment del progrés de l'alumne i garanteix certa continuïtat en el treball per part de l'estudiant. A més, a diferència de les altres, essent una assignatura més, sembla natural parlar d'avaluació. No oblidem que els crèdits variables són, tradicionalment fàcils d'aprovar, o més ben dit, molt difícils de susprendre. Més enllà de si això hauria de canviar o no, quan parlo d'avaluació vull emfatitzar-ne particularment el caràcter formatiu. Un crèdit variable d'aquestes característiques és una bona oportunitat per usar l'avaluació en la seva forma més pura i més teòrica, aprofitant-la per a marcar pautes de seguiment de l'alumnat i ajudant-los ser conscients del seu progrés i de les seves mancances. D'aquesta manera, l'ús dels dossiers guanya en transversilitat, treballant aspectes de diferents competències bàsiques de l'alumne, a més de treballar amb profunditat la competència matemàtica.

És per aquests motius que crec que aquesta és l'opció preferent. En cas de tenir la intenció d'usar el material que he dissenyat i de tenir la oportunitat de fer-ho, segurament aquesta és la manera de fer-ne més bon ús i obtenir progressos més significatius. A més, un crèdit variable està obert a tots els alumnes, de manera que el material és treballat per alumnes amb nivells molt diferents, no només per alumnes amb especial predilecció per les matemàtiques, cosa que trobo molt positiva. D'altra banda, aquest fet provoca que dins d'aquest mateix grup ens trobem amb qüestions relatives a l'atenció a la diversitat. No obstant, els crèdits variables d'aquesta mena acostumen a tenir una demanda força baixa (malauradament) i en conseqüència, crec que un sol professor és perfectament capaç de gestionar les diferències entre els ritmes d'aprenentatge dels alumnes del grup.

6.5 Hores de classe

Durant l'etapa d'ESO, és habitual i més que recomanable dedicar part de les sessions a deixar que els alumnes facin exercicis i resolguin problemes. Com hem comentat abans, dins del marc de la pedagogia, un dels principis del constructivisme és que l'aprenent ha de prendre part activa en el procés d'aprenentatge. Ara bé, la diversitat de nivells que coexisteixen dins el grup és inqüestionable i, de fet, és la raó de ser d'aquest treball. Així, quan un professor dedica una part de la sessió a deixar que els alumnes resolguin problemes, sovint la seva tasca es limita a ajudar a aquells alumnes amb més dificultats de comprensió o menys habilitat a nivell matemàtic. El problema arriba quan uns quants alumnes acaben els problemes encarregats pel professor, i en aquest moment és fàcil perdre el control de la classe i com a conseqüència desatendre els alumnes que ho necessiten. Per evitar aquestes situacions hi ha diverses opcions:

- Encarregar més problemes sobre el tema als alumnes que han acabat. Val la pena tenir en compte però, que això no sempre és possible, si no es treballa amb un llibre per exemple, aquest recurs pot resultar difícil de dur a la pràctica. D'altra banda, els alumnes que han acabat, possiblement ja han assimilat les idees relatives a els problemes encarregats, i fer més problemes sobre el mateix possiblement no sigui l'activitat més productiva per a ells.

- Que els alumnes que acabin, ajudin als alumnes amb més dificultats a comprendre el problema. D'aquesta manera, l'alumne que ha acabat primer, repassa i referma els conceptes i arguments treballats pel problema, i l'alumne amb més dificultats rep una explicació alterntiva a la del professor, l'explicació feta per un company. Aquesta manera de treballar funciona, sempre i quan els alumnes hi estiguin molt acostumats i no se n'abusi.

- Oferir als alumnes material alternatiu. Aquells alumnes que han acabat amb els problemes poden dedicar el temps restant de la sessió a treballar en algun dels dossiers que he presentat. D'aquesta manera, evites situacions propícies a generar conflictes o conductes disruptives causades per l'avorriment d'alguns alumnes i els ofereixes la possibilitat de treballar en unes matemàtiques diferents, que poden ser vistes com un repte intel·lectual per l'alumne.

Amb l'opció que proposo, s'atenen els alumnes amb més facilitat per les matemàtiques, mantenint-los ocupats intentant superar un repte matemàtic molt profitós per a la seva formació i, al mateix temps, això permet que el professor atengui als alumnes amb més dificultats d'aprenentatge.

Aquesta opció, és bàsicament una forma de gestionar la diversitat quan no es tenen altres recursos. És clar, que entre totes les opcions, aquesta és l'alternativa que menys aprofita els dossiers i que ofereix pitjors resultats i progressos. No obstant, és un recurs que pot resultar molt útil per a un professor, ja que s'usa en una situació freqüent i que fàcilment deriva en una situació conflictiva.

Una bona manera de millorar el rendiment d'aquesta opció és intentar combinar-la d'alguna manera amb la primera alternativa descrita: aprenentatge autònom.

7 Conclusions

Per mi, aquest ha estat un curs intens en molts sentits. El màster, i sobretot les pràctiques, m'han donat una experiència que valoro molt positivament perquè m'ha fet evolucionar en l'aspecte personal. La veritat és que, la meva estada al centre de pràctiques, ha esborrat qualsevol dubte sobre quin vull que sigui el meu futur professional proper.

Com ja hem comentat en diverses ocasions en el transcurs del treball, es pot dir que la raó de ser d'aquest document és l'atenció a la diversitat. En tots els centres del nostre país s'hi han creat ens acadèmics dedicats a cobrir les necessitats educatives especials d'aquells alumnes que, per motius molt diversos, presenten dificultats en l'aprenentatge. Malauradament, aquells alumnes que mostren facilitat i habilitats especials per l'estudi son els esudiants que s'han quedat sense una adaptació curricular personalitzada. En certa manera, podriem dir que s'està malbaratant la capacitat de molts estuiants. És fàcil culpar d'aquesta situació a la manca de recursos econòmics i la falta de personal, però de totes maneres, els docents d'ara i els futurs professors hem de fer el que estigui a les nostres mans per atendre també aquesta diversitat. La petita col·lecció de material que he elaborat en aquest treball, i les diverses possibilitats d'ús que he presentat, suposen una eina modesta però beneficiosa per a l'alumnat, a més, és un material amb possibilitats reals d'ús tenint en compte els recursos econòmics i de personal actuals. Segurament, les propostes d'utilització que he fet no són les que millor aprofiten el material ni segueixen la metodologia òptima per al progrés de l'alumnat, però si que encaixen perfectament en el funcionament actual dels centres i són fàcilment adaptables a la tasca docent.

Malgrat hi puguin haver similituds, la meva idea no era generar un material destinat només al tipus d'estudiants que podrien estar inclosos en el projecte ESTALMAT. L'ESTALMAT, és un projecte pioner dedicat a l'estímul del talent matemàtic. El material que utilitzen i la feina que fan és d'un nivell pedagògic altíssim i d'un nivell matemàtic molt exigent. És per això que calen fer proves d'accés, per a assegurar-se la possibilitat de treballar amb grups reduïts i alumnes amb altes capacitats. El públic a qui jo vull destinar el material que he elaborat és molt menys restrictiu. Podriem dir, d'alguna manera que els alumnes del projecte ESTALMAT representen l'èlit de tot el grup d'estudiants a qui jo voldria dedicar els recursos d'aquest treball. En un centre educatiu qualsevol, és relativament fàcil trobar-se amb un alumne de 3r o 4t d'ESO interessat i capaç d'aprofitar els dossiers que he elaborat, en canvi és força més difícil trobar un alumne capaç d'accedir al projecte ESTALMAT. El gust, l'interès i una mica d'habilitat per les matemàtiques són les capacitats desitjables en un alumne que vulgui fer ús del material presentat en aquest treball. I en cada cas, s'hauria d'escollir la possiblitat de gestió més adient i ajustada al perfil de l'alumne.

La veritat és que quan vaig començar a fer el treball em va sorprendre una mica l'enorme quantitat d'informació existent sobre educació matemàtica. Tant a nivell de recursos electrònics com a nivell de recusos en paper. Escollir els temes i estructurar els dossiers ha sigut un exercici de didàctica de la matemàtica interessant per a mi. A més, plantejar-me les diversess possibilitats d'ús dels dossiers encaixant les metodologies de treball al funcionament del centre (basant-me en la meva experiència de les pràctiques) ha estat complicat i ha fet que m'adoni encara més de les dificultats que suposa la tasca d'atendre a la diversitat cultural i de rendiment en els centres educatius.

D'altra banda, aquest treball m'ha ajudat molt a familiaritzar-me encara més amb el GeoGebra, ja que jo mateix m'he encarregat de dibuixar totes les figures que apareixen al llarg del text utilitzant aquest software. Realment és una eina a tenir en compte, també fora de l'àmbit de l'educació matemàtica. Val a dir que he quedat una mica sorprès de no haver sentit a parlar mai d'aquest programa en els cinc anys de llicenciatura, ja que és una eina senzilla, còmode i pràctica.

En to de síntesi, m'agradaria dir que elaborar el treball de fi de màster ha resultat ser una tasca interessant, que m'ha ajudat a implcar-me i comprendre una mica millor els diferents aspectes i dificultats de la tasca d'atenre a la diversitat en els centres educatius.

Referències

[1] F. Comellas, J. Fàbrega, A. Sànchez, O. Serra. *Matemàtica discreta.* Edicions UPC, 2001.

[2] ESTALMAT Andalucía:E. Amaro, F.Damián Aranda, A. del Carrillo de Albornoz, J. Mª Chacón, M. de la Fuente, M. Gómez, P. Jara, L. Merino, A.Pozo. ESTALMAT Catalunya: A. Armenteras, M. Berini, D. Bosch, J. Deulofeu, L. Figueras, P. Fornals, A.Gomà. ESTALMAT Castilla y León: J.Manuel Arranz, C. de la Fuente, F.José Merayo, J. Rubal. ESTALMAT Galicia: T.Otero, A. Pedreira, G. Temperán. ESTALMAT Madrid: M. Castrillón, E. Hernández, J. García, M. Reyes, M. Sánchez.

Matemáticas para estimlar el talento. Actividades del proyecto ESTALMAT.

Editat per la Sociedad Andaluza de Edicación Matemática THALES, 2009.

[3] Loren C. Larson. *Problem-solving through problems* (Problem books in mathematics). Springer-Verlag, New york, 1983.

[4] Roger B. Nelsen, Claudi Alsina. *Math made visual. Creating images for understanding mathematics.* The Mathematical Association of America, 2006.

[5] Roger B.Nelsen. *Proofs without words. Exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America, 1993.

[6] Mª Joaquina Berral Yerón, Immaculada Serrano Gómez. *Si ho amague, ho trobes?. Aritmètica del rellotge.* Programa de profundización de conocimientos, *Ven x + matemáticas*, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

[7] Servei d'Ordenació Curricular.*Currículum educació secundària obligatòria.* Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions.

`http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/file.php?file=docs/ESO/curriculum_eso.pdf`

[8] Nancy Antonellis, Steve Benson, Paul Goldenberg, Eric Karnowski, Helen Lebowitz. *Education Development Center.*

`www.edc.org/mathproblems`

[9] Alexander Bogomolny. *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.* Secció de Geometria.

`http://www.cut-the-knot.org`

[10] Christopher P. Mawata. *Math Cove.* Secció de grafs.

`http://www.mathcove.net/petersen/lessons/index`

[11] Ministerio de educación del Gobierno de España. *Presentación del informe PISA 2009 elaborado por la OCDE*

`http://www.educacion.gob.es/horizontales/prensa/notas/2010/12/informe-pisa.html`

[12] GeoGebra. Per elaborar totes les figures que apareixen en el treball.

`www.geogebra.org`